



Universidade Federal Fluminense
Curso: Sistemas de Informação
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professora: Raquel Bravo

Gabarito da Lista de Exercícios sobre Arranjos com repetição

1. Considere os números de 3 algarismos formados com os dígitos 2, 3, 5, 8 e 9.
 - (a) Quantos são estes números?

Resposta: Cada número de 3 algarismos (que podem ser repetidos) formados com os dígitos 2, 3, 5, 8 e 9 corresponde a um arranjo com repetição de 5 elementos tomados 3 a 3. Portanto, o número total destes números é $AR_5^3 = 5^3 = 125$.

- (b) Quantos são menores do que 800?

Resposta: Como os números devem ser menores do que 800, significa que o primeiro algarismo (centena) não pode começar nem com 8 nem com 9. Portanto, para esta posição, temos 3 possibilidades.

Dada uma possibilidade para a primeira posição, para as 2 posições restantes (dezena e unidade) podemos colocar os algarismos 2, 3, 5, 8 e 9 tomados 2 a 2. Como os algarismos podem estar repetidos, para estas duas posições temos $AR_5^2 = 5^2$ possibilidades.

Então, pelo princípio multiplicativo, temos que a quantidade de números de 3 algarismos menores de 800 que podem ser formados com os números 2, 3, 5, 8 e 9 é $3A_5^2 = 75$.

(c) Quantos são múltiplos de 5?

Resposta: Com os dígitos dados, os únicos números múltiplos de 5 são os que finalizam em 5. Portanto, restam duas posições (centenas e dezenas) para colocar os algarismos 2, 3, 5, 8 e 9 tomados 2 a 2 que podem ser repetidos. Logo, os múltiplos de 5 são $AR_5^2 = 5^2 = 25$.

(d) Quantos são pares?

Resposta: Os números pares são aqueles finalizados em 2 ou 8, ou seja temos 2 possibilidades para as unidades.

Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior temos para as primeiras duas posições AR_5^2 possibilidades.

Então, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números pares é $2AR_5^2 = 50$.

(e) Quantos são ímpares?

Resposta: Os números ímpares são $3AR_5^2 = 75$.

2. Quantas são as palavras de 5 letras de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra?

Resposta: Definimos os seguintes conjuntos:

U é o conjunto dos anagramas de 5 letras de um alfabeto de 26 que não começam com a letra **A**;

B é o conjunto dos anagramas de 5 letras de um alfabeto de 26 que não contêm a letra **A**;

A é o conjunto dos anagramas de 5 letras de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** figura mas não é a letra inicial da palavra (a letra **A** pode aparecer em várias posições).

Devemos calcular $n(A)$. Observemos que $B \subseteq U$, $A \subseteq U$ e $A = U - B$, portanto $n(A) = n(U) - n(B)$.

Começamos calculando $n(U)$: como a letra inicial não pode ser **A**, para a primeira posição dos anagramas de U temos 25 modos. Para as restantes posições temos AR_{26}^4 . Portanto, pelo princípio multiplicativo, resulta $n(U) = 25AR_{26}^4 = 25 \cdot 26^4$.

Calculamos agora $n(B)$, como **A** não figura em nenhuma posição dos anagramas de B , resulta $n(B) = AR_{25}^5 = 25^5$.

Logo, $n(A) = 25 \cdot 26^4 - 25^5$.

3. Quantos números de 3 e 4 algarismos maiores do que 300 podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 5 e 7?

Resposta:

- 3.1. Quantidade de números de 3 algarismos maiores do que 300 formados com 0, 1, 3, 5 e 7:

Observemos que para o primeiro dígito (centena) as possibilidades são 3, 5 ou 7.

Primeiro, consideramos os números que começam com 3. Temos 2 situações diferentes:

(i) O segundo algarismo do número é 0. Então, as unidades podem ser 1, 3, 5 ou 7, ou seja, temos 4 possibilidades.

(ii) O segundo algarismo do número é diferente de 0. Neste caso o segundo algarismo pode ser 1, 3, 5 ou 7 o que dá 4 possibilidades. Fixado o segundo algarismo para as unidades podemos selecionar dentre 0, 1, 3, 5 e 7, ou seja, para as unidades temos 5 possibilidades. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 5 = 20$ números que começam com 3 e o segundo algarismo é diferente de 0.

Portanto, pelo princípio aditivo, a quantidade de números que começam com 3 é $4 + 20 = 24$.

Agora estudamos a quantidade de números de 3 algarismos maiores do que 300 que não começam com 3. Para a primeira posição temos 2 possibilidades (5 ou 7). Para as duas posições restantes temos $AR_5^2 = 5^2$ possibilidades. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $2AR_5^2 = 50$ modos diferentes para este caso.

Logo, pelo princípio aditivo, concluímos que a quantidade de números de 3 algarismos maiores do que 300 é $24 + 50 = 74$.

- 3.2. Quantidade de números de 4 algarismos formados com 0, 1, 3, 5 e 7:

Para a primeira posição temos 4 maneiras (1, 3, 5 ou 7). Fixado um número na primeira posição, temos $AR_5^3 = 5^3$ possibilidades, pois também devemos considerar o 0 e os números podem estar repetidos. Logo, neste caso, usando o princípio multiplicativo temos $4AR_5^3 = 500$ possibilidades.

Finalmente, pelo princípio aditivo, temos que a quantidade de números de 3 e 4 algarismos distintos e maiores do que 300 que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 5 e 7 é $74 + 500 = 574$.

4. Quantos são os números de 5 algarismos na base 10:

(a) nos quais o algarismo 2 figura?

Resposta: O raciocínio é semelhante ao usado na questão 2, definimos os seguintes conjuntos:

U é o conjunto dos números de 5 algarismos na base 10;

B é o conjunto dos números de 5 algarismos na base 10 que não contêm o algarismo 2;

A é o conjunto dos números de 5 algarismos na base 10 nos quais o algarismo 2 figura.

Nesta parte vamos calcular $n(A)$ sabendo que $n(A) = n(U) - n(B)$. Temos que $n(U) = 9AR_{10}^4 = 9 \cdot 10^4 = 90000$ e $n(B) = 8AR_9^4 = 8 \cdot 9^4 = 52488$. Portanto, $n(A) = 37512$.

(b) nos quais o algarismo 2 não figura?

Resposta: Corresponde a $n(B) = 52488$ calculado no item anterior.

5. Com os algarismos de 1 a 9 quantos números constituídos de 3 algarismos pares e 4 algarismos ímpares podem ser formados se é permitida a repetição dos algarismos pares?

Resposta:

(i) Começamos selecionando 4 lugares dentre 7 para colocar os algarismos ímpares. O total de possibilidades é $C(7, 4)$.

(ii) Para cada escolha de 4 posições, estudamos o número de possibilidades de colocar nesses lugares 4 algarismos ímpares sem repetição. Como os ímpares são 1, 3, 5, 7, e 9, temos $A(5, 4)$ formas diferentes.

(iii) Observemos que, fixado os lugares para os algarismos ímpares, ficam automaticamente definidas as 3 posições dos algarismos pares (2, 4, 6, 8). Portanto, para cada colocação dos ímpares temos $AR(3, 4)$ maneiras de colocar os pares nas posições que restam pois é permitida a repetição.

De (i), (ii) e (iii) e do princípio multiplicativo, concluímos que a quantidade de números constituídos de 3 algarismos pares e de 4 algarismos ímpares que podem ser formados se é permitida a repetição dos algarismos pares é $C(7, 4)A(5, 4)AR(4, 3) = 268800$.

Notemos que podemos começar analisando os lugares e possibilidades para os algarismos pares.

6. Com as 5 letras a, b, c, d, e , quantos anagramas de 3 letras podem ser formados se:

(a) as 3 letras são distintas?

Resposta: Como temos de escolher anagramas de 3 letras distintas dentre 5, o número total corresponde a $A(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$.

(b) pelo menos duas letras são idênticas?

Resposta: Definamos os seguintes conjuntos:

U é o conjunto dos anagramas de 3 letras formados com a, b, c, d, e ;

B é o conjunto dos anagramas de 3 letras diferentes formados com a, b, c, d, e ;

A é o conjunto dos anagramas de 3 letras que têm pelo menos 2 repetidas, formados com a, b, c, d, e .

Queremos calcular $n(A)$. Como $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ e $A = U - B$, resulta $n(A) = n(U) - n(B)$.

Temos $n(U) = AR_5^3 = 5^3 = 125$ e $n(B) = A(5, 3) = 60$, logo, $n(A) = 125 - 60 = 65$.

7. Quantos números ímpares existem entre 100 e 999?

(Observação: Lembre que estão excluídos os números 100 e 999)

Resposta:

Raciocínio usando arranjos com repetição:

Consideramos os seguintes conjuntos:

U é o conjunto dos números entre 100 e 999 incluídos 100 e 999;

B é o conjunto dos números pares (divisíveis por 2) entre 100 e 999 incluído 100;

A é o conjunto dos números ímpares entre 100 e 999 incluído 999.

O nosso problema consiste em calcular $n(A) - 1$ pois não podemos contar o número ímpar 999 que está incluído em $n(A)$.

Novamente temos que $n(A) = n(U) - n(B)$. Temos que $n(U) = 9AR_{10}^2 = 900$ pois na posição das centenas temos 9 possibilidades e 10 para as dezenas e unidades.

Os números pares entre 100 e 999 incluído 100 é $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ pois temos 9 possibilidades para o primeiro dígito (centenas), 10 para o segundo e 5 para o terceiro (0, 2, 4, 6, 8).

Logo, a quantidade de números ímpares que existem entre 100 e 999 excluindo o 999 é $n(A) - 1 = n(U) - n(B) - 1 = 900 - 450 - 1 = 449$.

Raciocínio sem usar arranjos com repetição:

Os números ímpares finalizam em 1, 3, 5, 7 ou 9. Os números podem começar de 9 maneiras (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e para as dezenas temos 10 possibilidades pois incluímos o 0. Portanto, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números ímpares entre 100 e 999 incluído 999 é $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$. Como devemos excluir o 999, temos que os números ímpares existem entre 100 e 999 são $450 - 1 = 449$.